Domande orali per l'ammissione SNS 2015

13 dicembre 2015

1 Descrizione

Questo pdf raccoglie 165 problemi o domande posti agli esami orali per l'ammissione alla Scuola Normale Superiore, nel concorso del 2015. La lista contiene quasi tutte le domande poste agli ammessi e qualcuna di quelle poste ai non ammessi. Inoltre, domande molto simili sono state accorpate per evitare ripetizioni: in particolare all'esame di fisica accade che i professori, riguardo allo stesso problema, facciano domande diverse a persone diverse.

2 Domande per matematici e fisici

2.1 Matematica

1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f si definisce algebrica se e solo se esiste un polinomio $p(x, y)$ tale che $p(x, f(x)) \equiv 0$. Dimostrare che $f(x) = \sin x$ non è algebrica.

2. Dato un triangolo, trovare la retta che minimizza la somma delle distanze dei vertici dalla retta.

3. Trovare la miglior costante $c(n)$ tale che $\left(\sum a_i\right)\left(\sum 1/a_i\right) \geq c(n)$ per ogni scelta di n reali positivi $a_1, \ldots, a_n$. Quando vale l'uguaglianza?

4. Qual è la definizione di funzione periodica? Trovare una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ con periodo arbitrariamente piccolo (cioè tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $a < \varepsilon$ tale che la funzione ha periodo a).

5. Criteri di divisibilità. Perché funzionano quelli del 3, del 9 e dell'11? Generalizzare questi criteri per una base b generica.

6. Dato un triangolo equilatero, quanto vale il rapporto tra i raggi della circonferenza circoscritta e di quella inscritta? Data una circonferenza e un punto al suo interno, quanti triangoli equilateri inscritti nella circonferenza contengono il punto sul proprio perimetro, al variare della sua posizione?

7. Qual è la derivata di $\arctan x$? Sia $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$; trovare $f'(x)$. Se la derivata di una funzione è zero, allora la funzione è sempre costante? Trovare il valore di $f(x)$ trigonometricamente.

8. Risolvere sugli interi $3x + 15y + 9z = 17$ e $3x + 15y + 9z = 6$. In quest'ultima, quali valori di x danno soluzioni valide?

9. Divisione euclidea. Perché funziona l'algoritmo di Euclide per il massimo comun divisore?

10. Si vuole andare da Pisa a Firenze (che distano L in linea retta) in treno, senza biglietto e senza prendere multe. Assumiamo che si possa scendere dal treno in qualsiasi punto del tragitto (che è rettilineo) senza perdere tempo a cambiarlo e che la probabilità di essere trovati dal controllore sia proporzionale alla distanza percorsa stando sullo stesso treno. Trovare la miglior strategia e determinare la probabilità di arrivare a Firenze senza essere beccati.

11. Risolvere negli interi $x^3 - y^3 = 91$.

12. In una griglia ortogonale (a vertici interi) sul piano cartesiano, partendo dall'origine e potendosi muovere solo a destra e in alto, quanti sono i possibili percorsi per arrivare in (m, n)? Qual è la probabilità di arrivare in (m, n) scegliendo ad ogni incrocio di andare a destra o verso l'alto con probabilità $1/2$?

13. Esistono polinomi $p(x)$ che soddisfano $p(\sin x) = \sin(2x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$?

14. Date nello spazio una sfera e una retta esterna ad essa, e preso un punto P a caso sulla sfera e uno Q a caso sulla retta, descrivere il luogo della seconda intersezione di PQ con la sfera al variare di Q sulla retta.

15. Dati n punti di coordinate note sul piano cartesiano, scrivere un polinomio che interpola tutti questi punti e discuterne l'esistenza.

16. Trovare tutti i $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $|\sin(p(x))| \leq 1/2\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

17. Definizione di irriducibilità nei polinomi; studiare il caso di irriducibilità in $\mathbb{Z}$; con p primo (cioè tale che solo 1 e p dividono p), dimostrare che se $p \mid ab$, allora $p \mid a$ o $p \mid b$ [come nella domanda 40, vedere lì per un hint]. Ripetere il ragionamento nel caso dei polinomi.

18. Risolvere e discutere $x - \alpha = \sqrt{2\alpha - x}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

19. Stimare il numero di cifre della parte periodica di $100/97$.

20. Dimostrazione di Euclide dell'infinità dei numeri primi. Usare un'idea simile per dimostrare l'infinità dei primi del tipo $4k + 3$.

21. Trovare tutte le terne $(a, b, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ tali che $a \sin x + b(\sin x)^n = 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

22. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge o diverge? E $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$?

23. Una formica si trova al centro di un cerchio di raggio R e ogni secondo fa un passo lungo 1 in una direzione arbitraria. Un diavoletto, che non vuole farla uscire dal cerchio, può ogni volta mandare la formica nel verso opposto a quello da lei scelto. La formica può uscire dal cerchio? E se invece, anziché essere tutti lunghi 1, i passi seguono la serie armonica (cioè l'n-esimo passo è lungo $1/n$), riesce ad uscire?

24. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Se x è irrazionale, allora $f(x) = 0$, altrimenti, se $x = p/q$, con p, q interi, $q > 0$, $\gcd(p, q) = 1$, allora $f(x) = 1/q$. Quali sono i punti in cui f è continua?

25. Siano a e b due numeri reali compresi tra 0 e 1; siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori in $\mathbb{R}^2$. Cosa rappresenta $a\vec{v} + b\vec{w}$, al variare di a e b? E se aggiungiamo la condizione $a + b = 1$? Usare i risultati ottenuti per esprimere un piano in $\mathbb{R}^3$ sapendo che deve essere parallelo a due vettori dati e passante per un punto P fissato.

26. Nel gioco del tennis, per vincere un game è necessario distaccare l'avversario di almeno 2 punti ed essersi aggiudicati almeno 4 punti. Se un giocatore ha probabilità p di fare ogni punto, che probabilità ha di vincere il game?

27. Sia $f\colon [0;1] \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 3 - 3x & \text{se } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Trovare tutti i reali k in $[0;1]$ tali che, partendo da $f(k)$, si può iterare f infinite volte (cioè l'immagine sta sempre in $[0;1]$). Hint: provare a scrivere i reali di quell'intervallo in base 3, usando potenze negative. Detto K l'insieme dei numeri trovati, trovare una bigezione tra K ed $\mathbb{R}$.

28. Consideriamo una successione di reali positivi $a_1, a_2, a_3, \ldots$; supponiamo che tutti i reali tra 0 e 1 siano esprimibili come combinazione lineare degli a_i con pesi interi (cioè $a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3 + \ldots,\ n_i \in \mathbb{N}$). Dimostrare che $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$. Cosa si può dire sul viceversa?

29. Trovare tutte le coppie $(p(x), q(x)) \in \mathbb{R}[x]^2$ tali che $|p(x) - q(x)| < 100\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

30. Trovare la relazione tra l'area di un triangolo sferico e la somma dei suoi angoli interni.

31. Considerare i cerchi nel piano con centro $(\frac{m}{n}, \frac{1}{2n^2})$ e raggio $\frac{1}{2n^2}$ (con m, n interi); dimostrare che due cerchi distinti di questo tipo sono o disgiunti o tangenti; trovare la condizione perché siano tangenti; dimostrare la razionalità del punto di tangenza.

32. Studiare la funzione $\arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x}$. Ha derivata nulla? È costante?

33. La regola per derivare una somma di funzioni è

$$\frac{\mathrm{d}(f(x) + g(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x};$$

quella per derivare una funzione composta è

$$\frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}g(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Trovare la regola per derivare il prodotto di due funzioni.

34. Alberto e Barbara giocano ad un gioco a turni. In ogni turno, Alberto ha una probabilità p di vincere e Barbara ha una probabilità q di vincere. Quando un giocatore vince, il gioco finisce. Qual è la probabilità che

    (a) pareggino nel primo turno?

    (b) Alberto vinca all'n-esimo turno?

(c) Alberto vinca il gioco?

35. Per quali $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ la funzione $\sin(p(x))$ è periodica?

36. È vero che se una funzione è periodica, anche la sua derivata è periodica? È vero il viceversa?

37. Dati quattro numeri naturali, dimostrare che il prodotto delle 6 differenze a due a due è multiplo di 12.

38. Un produttore di videogiochi spende c per produrre un gioco e ricava $2c$ quando il gioco viene acquistato da una persona. Il gioco sarà distribuito a una popolazione di N persone, di cui q acquisteranno il gioco, dove $0 \leq q \leq N$ è una variabile casuale. Come si può massimizzare il guadagno?

39. Dimostrare che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Quanto fa invece $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x}$?

40. Cos'è il teorema fondamentale dell'aritmetica? Mostrare che in $2\mathbb{Z}$ (anello degli interi pari) tale teorema non vale. Dimostrare che se p è primo (cioè tale che solo 1 e p dividono p), allora $p \mid ab \implies (p \mid a) \vee (p \mid b)$ (hint: provare a ricavare il teorema di Bézout e da qui la tesi) e mostrare che ciò fallisce in $2\mathbb{Z}$. Perché fallisce?

41. Un poligono regolare ha centro nell'origine. Dimostrare che la somma dei vettori che vanno dall'origine ai vertici fa 0.

42. In quante parti, al più, n rette dividono il piano?

43. Scrivere $1/3$ in base 2.

44. Date tre rette parallele distinte, è sempre possibile costruire un triangolo equilatero tale che ogni vertice sia su una delle tre rette e vertici diversi siano su rette diverse?

45. Una lontra è al centro di una piscina quadrata e un leone intelligente ed affamato, ma incapace di nuotare, è ad un vertice della piscina, fuori dall'acqua. Finché la lontra è in acqua, la velocità del leone è tripla rispetto alla sua. Se la lontra esce dall'acqua, invece, riesce a scappare. Trovare una strategia che permette alla lontra di scappare, oppure dimostrare che non esiste.

46. In una Torre di Hanoi, quante mosse ci vogliono, almeno, per spostare una pila di dischi da un paletto all'altro?

47. Trovare tutti i $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $\sin(p(x)) < p(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

48. Dimostrare che da ogni successione di reali si può estrarre una sottosuccessione monotona.

49. Trovare una formula chiusa per il termine generale della successione

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, \ldots$$

50. Consideriamo tre punti A, B, P su una circonferenza di centro O e raggio r. Sia Q il simmetrico di P rispetto alla retta OB. Le rette AP e AQ incontrano la retta OB rispettivamente in C e D. Dimostrare che $OC \cdot OD = r^2$.

51. Esiste un polinomio a coefficienti interi che ha come radice $\sqrt{7+\sqrt[3]{2}}$?

52. Consideriamo la trasformazione che manda un rettangolo di dimensioni a e b nel rettangolo di dimensioni $\frac{2a+b}{3}$ e $\frac{2b+a}{3}$. Applicando ripetutamente questa trasformazione, a quale rettangolo ci si avvicina?

53. Consideriamo un rettangolo $m \times n$ con $m, n \in \mathbb{N}^+$ ricoperto completamente da tasselli 1×1. Chiamiamo *permutazione* della tassellazione uno spostamento dei tasselli che mandi ogni tassello in una casella adiacente a quella ricoperta prima o lo lasci dov'era prima. Quali condizioni su m e n garantiscono che ogni permutazione lasci almeno un tassello fermo?

54. Dato $n \in \mathbb{Q}$ tale che
$$\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} \in \mathbb{N},$$
cosa si può dire su n?

55. Risolvere negli interi positivi
$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) = 2.$$

56. Dati due punti distinti nello spazio, qual è il luogo delle proiezioni del primo punto su un piano passante per il secondo, al variare del piano?

57. Trovare $f(z)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ che in un intorno di zero soddisfi $f(z) = z + f(z^2)$.

58. Data una circonferenza di raggio R ed un punto a distanza $d > R$ dal centro della circonferenza, trovare il luogo dei punti del piano equidistanti dal punto e dalla circonferenza.

59. Parametrizzare i punti della circonferenza goniometrica a coordinate razionali e le coppie di punti a distanza razionale.

60. Dimostrare che esiste un numero reale il cui quadrato è 2.

61. Considerare la successione $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$. Per quali valori di x_0 converge e a cosa?

62. Data una circonferenza e un punto P, trovare il luogo dei punti medi delle corde le cui rette passano per P.

63. Calcolare la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nk^{n-1}$, con $0 < k < 1$.

64. Trovare una bigezione tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Una tale bigezione può essere continua?

65. Sia $f\colon (0;1) \cup (1;2) \to \mathbb{R}$ definita come
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$
f è derivabile?

66. Sia dato un n-agono sui cui vertici sono scritti dei numeri reali. Questi numeri cambiano ogni secondo, secondo la seguente regola: se al secondo t sul vertice i è scritto il numero $a_i(t)$, vale $2a_i(t+1) = a_{i-1}(t) + a_{i+1}(t)$. Allora

    (a) dire come si evolve il sistema (cosa succede al massimo e al minimo dei numeri) e quali sono le possibili configurazioni che non cambiano nel tempo;

    (b) proporre un modo semplice di studiare il sistema (risposta: vederlo come sovrapposizione di stati che partono con un 1 e tutti 0).

67. Sia dato un segmento AB nel piano; prendiamo due rette variabili r e s nel piano, parallele tra loro, passanti rispettivamente per A e per B. Al variare della loro direzione, qual'è il luogo dei centri dei cerchi tangenti ad AB, r e s?

68. Trovare una funzione suriettiva che mandi una circonferenza in un arco di circonferenza contrattile. (E una bigettiva?)

2.2 Fisica

1. Un blocco di massa M è poggiato su un foglio di massa m, a sua volta poggiato su un tavolo. Il coefficiente d'attrito (sia statico, sia dinamico, sia tra tavolo e foglio, sia tra foglio e blocco) è μ. È applicata una forza F al foglio, orizzontalmente. Disegnare i grafici delle forze d'attrito in funzione di F.

2. Due cariche q sono poste a distanza d nel vuoto. È possibile inserire una carica arbitraria in un punto arbitrario dello spazio per mantenere il sistema delle tre cariche in equilibrio? In questa configurazione, qual è la frazione delle linee di campo aperte? La posizione d'equilibrio trovata è stabile? Inserendo altre due cariche q in modo da formare un quadrato, l'equilibrio è stabile? Come dovrebbe essere il campo elettrico attorno a un punto d'equilibrio stabile? Dimostrare che il campo elettrico non produce mai punti d'equilibrio stabile.

3. Scotta di più toccare la gomma a $100\,°\mathrm{C}$ o una monetina alla stessa temperatura? Perché?

4. Dati due corpi a temperature iniziali diverse T_1 e T_2 e di capacità termiche C_1 e C_2, qual è il massimo lavoro che può produrre una macchina termica che usa questi due corpi come serbatoio caldo e serbatoio freddo? Qual è il significato fisico della condizione imposta per il funzionamento della macchina?
   Se da un corpo (per semplicità un parallelepipedo) viene estratto calore da una faccia, cosa si può dire qualitativamente sull'andamento della temperatura rispetto alla posizione nel corpo?

5. Una sbarra omogenea di lunghezza l, poggiata su un tavolo senza attrito, viene colpita da una martellata a distanza d dal centro. Come si muove la sbarra subito dopo il colpo?
   Se invece la sbarra di prima è inizialmente congiunta ad un estremo ad un'altra sbarra uguale attraverso una giuntura liscia che permette le rotazioni, come si muoverà, qualitativamente, il sistema? La forza applicata dalla giuntura si può considerare impulsiva?

6. Una palla di massa m_1 è attaccata ad una molla di costante elastica k e lunghezza l_0. Una seconda palla, di massa m_2 e velocità iniziale v, colpisce la molla. Per

quanto tempo la seconda palla rimane a contatto con la molla? Quanto vale la distanza minima tra le masse?

7. Un gas reale (le cui molecole hanno volume non nullo e forma sferica) è immerso in un campo elettrico. Tra le molecole del gas si trovano degli elettroni, ognuno dei quali urta le molecole in media ogni T secondi. Qual è la velocità media degli elettroni dopo l'urto con le molecole? Qual è la velocità di deriva? E se aggiungiamo un campo magnetico?

8. Una carica q è posta a distanza h da un piano infinito conduttore. Calcolare il lavoro necessario per portarla a distanza infinita dal piano.
Come si misura il campo elettrico in un certo punto dello spazio? E se il campo elettrico misurato è in qualche modo proporzionale dalla carica di prova, cosa si può concludere?

9. Sulle due pareti opposte di un carrello di massa M sono attaccate due molle identiche (di costante elastica k, lunghezza l e lunghezza a riposo nulla), a loro volta attaccate ad una massa m al centro, sospesa grazie alle due molle (si può trascurare la gravità). Viene dato un impulso p al carrello nella direzione delle molle: cosa succede? Com'è il moto di ciascuna delle due masse? Successivamente, dopo un tempo T, viene dato un impulso $-p$: cosa succede? Ci sono casi in cui il sistema torna allo stato iniziale? Qual è il periodo delle oscillazioni del sistema attorno al centro di massa?

10. Stimare la pressione interna ad un chicco di mais appena prima che scoppi e diventi popcorn.

11. Un guscio sferico di raggio R e carica $-q$ è esterno e concentrico ad una sfera conduttrice di raggio r e carica q. Trovare campo e potenziale elettrostatici in tutti i punti dello spazio. Ripetere il calcolo nel caso in cui la sfera interna sia messa a terra.

12. Una sfera di raggio R cade verticalmente da una altezza h, colpendo lo spigolo di un gradino alto $d \ll h$. Quali quantità si conservano nei casi di attrito inesistente, statico, oppure dinamico? Determinare le condizioni (parametro d'impatto e tipo di urto) per cui la sfera, rimbalzando, arrivi più lontano possibile.

13. Una spira percorsa da corrente è posta a metà tra due fili paralleli e percorsi da corrente. Cosa succede? E con quattro fili? La spira è in equilibrio (e, se sì, stabile)?

14. Come si muovono i dipoli magnetici in campi magnetici? Se un dipolo magnetico è posto in un campo magnetico non uniforme, cosa succede? Ci sono punti d'equilibrio? Quanti? Sono stabili?

15. In generale, per trovare un punto d'equilibrio e verificare se è stabile, cosa si fa?

16. Due masse (m_1 e m_2) sono collegate da un filo ideale; m_1 è poggiata su un tavolo senza attrito, m_2 penzola da un buco attraverso il tavolo. Viene impressa una certa velocità in direzione arbitraria ad m_1. Com'è, qualitativamente, il moto, sia rispetto al tavolo, sia rispetto al sistema di riferimento non inerziale di m_1 (in particolare, notare la comparsa della forza di Coriolis)? Cosa si conserva?

Studiare le condizioni di stabilità. Impostare un'equazione differenziale per il moto nella direzione radiale.

17. Ad un palo cilindrico di raggio R è attaccato un filo lungo l, alla cui estremità c'è una massa m. Inizialmente il filo è tangente al palo. Alla massa viene impressa una velocità v_0 in direzione perpendicolare al filo e in verso tale che il filo si inizi subito ad avvolgere attorno al palo. Cosa si conserva? Con quale velocità la massa colpisce il palo? Dopo quanto tempo dall'istante iniziale? Trascurare la gravità.

18. In un biliardo rettangolare, una palla puntiforme di massa m e carica q parte con velocità v da un lato del biliardo ed entra in una regione rettangolare del biliardo in cui è presente un campo magnetico uniforme B diretto verso l'alto. Quali sono le condizioni per cui la palla giunge sul lato opposto del biliardo?

19. Una carica $2q$ è posta nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano e una carica $-q$ è posta a distanza d dalla prima sull'asse x. Senza alcun conto esplicito, qualitativamente, in quali punti del piano si annulla il campo elettrico? In quali è parallelo ad uno dei due assi? Dimostrare che sulla retta $y = d$ esiste un punto in cui il campo elettrico è parallelo all'asse y e che sulla retta $x = d$ esiste un punto in cui il campo elettrico è parallelo all'asse x. Quale frazione delle linee di campo del dipolo parte da $2q$ e arriva in $-q$? Studiare questo dipolo "decentrato".

20. Una nube di materiale orbita un pianeta. Esiste un certo valore d (limite di Roche) della distanza della nube dal centro del pianeta al di sotto del quale la nube non riesce ad aggregarsi e formare un satellite. Stimare d.

21. Un contenitore isolato termicamente e meccanicamente è diviso in due da un separatore e contiene un gas solo in una delle due parti. Togliendo il separatore, cosa succede? Come variano l'entropia e le altre funzioni di stato nei casi di gas ideale e non ideale?

22. Un blocco a forma di parallelepipedo va a sbattere contro un piano con una delle sue facce. La velocità iniziale del blocco è v ed è inclinata di un angolo α rispetto al piano; tra blocco e piano è presente attrito (coefficiente μ.) Determinare la componente orizzontale della velocità del blocco dopo l'urto, nell'ipotesi che la componente perpendicolare vari solo in verso.

23. Due cariche uguali in modulo e opposte in segno sono collegate da una molla, di lunghezza a riposo nulla, inizialmente inestesa, all'interno di una regione dello spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme $\vec{B}$. Le cariche si possono immaginare all'interno di un elettrone delocalizzato, in tal modo la forza di Coulomb può essere inclusa nella molla (perché?). Le cariche iniziano a muoversi con velocità $\vec{v}$ perpendicolare a $\vec{B}$. Cosa succede? Quanti gradi di libertà ha il sistema? Il centro di massa continua a muoversi a velocità $\vec{v}$? Quali condizioni iniziali si possono imporre per far sì che il centro di massa si muova di moto rettilineo uniforme? In questo caso, cosa compare nel sistema di riferimento del centro di massa?

24. Infiniti fili infiniti e paralleli sono messi in fila sullo stesso piano a distanza a costante e alternativamente con densità di carica λ e $-\lambda$. Trovare il campo elettrico a distanza $d \ll a$ e $D \gg a$ da un filo. Disegnare le linee di campo.

25. Un gas è contenuto in un tubo orizzontale i cui estremi sono mantenuti a temperature T_1 e T_2 diverse. Studiare lo stato del gas (in particolare, dare una stima di come varia la temperatura delle varie parti di gas nel tubo).

26. Un filo percorso da corrente passa per il centro (e perpendicolarmente al piano) di una spira circolare percorsa da corrente, lievemente ammaccata in un punto. Dare una stima del momento torcente sulla spira.

27. Un trenino di massa m viaggia su una rotaia circolare di massa M e raggio R. Il trenino parte da fermo e, dopo un transiente iniziale, la velocità relativa tra treno e rotaia è costante e pari a v_0. La rotaia appoggia su un piano senza attrito ed è inizialmente ferma. Studiare il moto del sistema (anche quantitativamente).

28. n cariche uguali puntiformi sono vincolate a muoversi lungo un filo di lunghezza L. Come si dispongono, qualitativamente, le cariche? E se possono muoversi su una superficie a forma di valle (come $y = x^2$)?

29. Su una superficie piana è posizionata una sfera di raggio R a cui viene impedito qualunque movimento. Sul punto più alto della sfera viene posizionata una massa m. Che tipo di equilibrio è? Se la massa comincia a scivolare lungo la sfera, a che distanza, rispetto al punto di contatto della sfera col piano, raggiunge la superficie? Ripetere l'esercizio nel caso in cui la sfera sia libera di muoversi, con considerazioni su eventuali attriti.

30. Un gran numero di particelle uguali (di massa m e carica q) sono distribuite uniformemente all'interno di una sfera di raggio R. Trovare potenziale e forza subita da una particella a distanza r dal centro. Se si lascia evolvere il sistema (togliendo la sfera nell'istante iniziale), cosa succede? Trovare potenziale e campo elettrico in un generico punto del sistema, dopo un tempo molto lungo.

31. Un bicchiere di vetro (di massa m e volume trascurabile) viene posto al contrario all'interno di una vasca piena d'acqua, in modo che un volume V di aria rimanga intrappolata all'interno del bicchiere. La temperatura dell'acqua nella vasca è T. Il bicchiere è fermo ad una certa profondità. Che tipo di equilibrio è? Inserendo due griglie in modo da impedire al bicchiere di fuoriuscire dal pelo dell'acqua, o di appoggiarsi al fondo, aumentando la temperatura, come si muoverà il bicchiere? Tracciare un grafico della profondità a cui si trova il bicchiere in funzione della temperatura.

32. Si può realizzare una macchina termica che lavora tra 2 sorgenti, spostando calore da quella fredda a quella calda, senza fornire lavoro? Perché? E se si fornisce lavoro, come si può definire il rendimento di questa macchina? Si può realizzare una macchina frigorifera che lavori con 3 sorgenti, senza fornire lavoro? E con 4?

33. All'interno di una cavità di un conduttore tridimensionale neutro viene posta una carica q. Come si distribuisce la carica sul conduttore? Come è il campo elettrico all'esterno del conduttore?

34. Stimare il libero cammino medio di una molecola d'aria.

35. Un circuito consiste in una resistenza R e due condensatori uguali di capacità C, tutti in serie, e un interruttore. All'inizio un condensatore ha carica Q e l'altro e scarico. Chiudendo il circuito: cosa succede? Fare il bilancio energetico prima

e dopo. Dove è finita l'energia persa? E se eliminiamo la resistenza, dove finisce l'energia?

36. Dato un disco omogeneamente carico, come sono le linee di campo nei punti prossimi alla superficie del disco? Come sono invece a grande distanza dal disco?

37. Un proiettile viene sparato contro un muro. Stimare la lunghezza del foro in funzione di parametri a piacere.

38. Dato un tubo chiuso alle estremità, di sezione semicircolare, sottoposto a gravità e riempito con un gas, trovare la pressione minima affinché una sfera posta nel punto più alto del tubo sia in equilibrio stabile. Poi, studiare le oscillazioni di una palla posta inizialmente nel centro del tubo che non faccia passare il gas da una parte all'altra.

39. Consideriamo un tubo di lunghezza L con dentro N palline uguali, di diametro $d \ll L$ e massa m, che si muovono senza attrito con velocità v. Calcolare la forza media sui tappi alle estremità del tubo. Che analogie ci sono col modello dei gas? Fare considerazioni nel caso in cui d non sia trascurabile.

40. In una vasca con le pareti verticali, piena d'acqua fino a un certo punto, fissiamo un cilindro attaccandone una base alla parete, in modo che sia per metà fuori e per metà dentro l'acqua, lasciandolo però libero di ruotare attorno al proprio asse. Il cilindro ruota? E in generale, per qualsiasi altro tipo di solido?

41. Una palla da biliardo viene colpita a metà altezza dalla stecca. La superficie su cui poggia la palla ha coefficiente d'attrito μ. Come si evolve il moto della palla? Quanto tempo impiega prima di cominciare a rotolare? Quant'è l'energia persa? E la potenza dissipata? È un modello attendibile, o nella realtà esiste qualche fenomeno che si sta trascurando?

42. Due palloncini identici sono gonfiati in modo diverso: il primo è gonfiato lentamente finché, raggiunta una certa dimensione, esplode; il secondo è gonfiato di colpo finché raggiunge le dimensioni a cui è esploso l'altro palloncino. Spiegare perché il secondo palloncino non esplode immediatamente come il primo, ma esplode un po' di tempo dopo che è lasciato in quelle condizioni.

43. Dato un certo ciclo termodinamico sul piano p–V, trovarne il rendimento e confrontarlo con quello di una macchina di Carnot che opera tra le stesse temperature. Esiste un limite alla potenza di una macchina di Carnot? Cioè, si possono far fare quanti cicli di Carnot si vogliano in un certo tempo fissato, o si perdono delle ipotesi sulle trasformazioni?

44. In un reticolo planare quadrato infinito di resistenze R, qual è la resistenza equivalente tra due nodi contigui?

45. Si vuole intuire la forma di un oggetto calcolandone il momento d'inerzia. Quest'oggetto viene lanciato orizzontalmente su un piano da altezza h e velocità v: esso, dopo il primo rimbalzo, si muove verticalmente; dopo il secondo rimbalzo torna a muoversi di moto parabolico. Trovare il momento d'inerzia dell'oggetto e dedurne la possibile forma.

46. Un cono (di raggio r, altezza h e massa M) è imperniato attorno al centro della sua base, che poggia su un piano (senza attrito) ed è libera di ruotare. Le pareti laterali del cono sono percorse da una guida. Una pallina di massa m viene lasciata sulla cima del cono, segue la guida e, arrivata in fondo, lascia la superficie del cono in modo che la sua velocità sia tangente alla circonferenza di base. Trovare la velocità finale della pallina.

47. Stimare la velocità minima necessaria ad un aereo per mantenersi in quota.

48. Cosa sono la forza centripeta e centrifuga?

49. Definire il potenziale.

50. In un tubo orizzontale chiuso alle estremità sono libere di scorrere senza attrito alcune sfere identiche, di diametro appena inferiore a quello del tubo, che si urtano con urti elastici. Determinare la pressione media sui tappi e fare un parallelo con la legge dei gas.

51. I punti A, C_0, C'_0, B sono collegati in serie (in quest'ordine) da tre resistenze R. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, le seguenti coppie di punti sono collegate ciascuna da una resistenza R: C_{n+1} e C_n; C'_{n+1} e C'_n; C_{n+1} e C'_{n+1}. Determinare la resistenza equivalente tra A e B.

52. Nel moto di puro rotolamento, quali sono le principali differenze tra i solidi reali ed ideali?

53. Sugli spigoli di un cubo $ABCDA'B'C'D'$ di lato l una corrente I compie il seguente percorso: $A \to B \to C \to C' \to D' \to A' \to A \to \dots$
Trovare il campo magnetico nel centro del cubo.

54. Un filo di lunghezza l è fissato ad un perno a attorno al quale può ruotare senza arrotolarsi e ad una massa, che si muove, attaccata al filo, a velocità angolare ω attorno al perno. Un bastoncino molto sottile viene inserito a distanza $x < l$ dal centro, in modo che la massa cominci a girargli attorno. Sapendo che la tensione massima sopportata dal filo è T, per quali x il filo non si spezza?

55. Stimare la densità dell'aria.

56. Descrivere qualitativamente il moto di una sbarretta isolante con due cariche opposte agli estremi, in presenza di un campo magnetico perpendicolare al piano contenente la sbarretta.

57. Cosa succederebbe se si fermassero tutte le molecole di gas presenti in una stanza e si desse a metà di esse una medesima velocità orizzontale e all'altra metà la velocità opposta?

58. Dato un grafico del potenziale di una particella, descriverne il moto, in base alla posizione di partenza.

59. Consideriamo una guida circolare liscia, di raggio R, posta nel piano verticale verticale e una massa m vincolata a muoversi su questa guida. La guida viene messa in rotazione attorno al proprio diametro verticale, con velocità angolare ω. Trovare le posizioni di equilibrio stabile e instabile in funzione di ω.

60. A due punti di una sbarra verticale sono attaccate le estremità di un'asta flessibile. All'asta flessibile è vincolato un bastone lungo l, che all'altra estremità ha attaccata una massa m. Supponendo che la sbarra verticale giri con velocità angolare ω e che la forza elastica di richiamo dell'asta flessibile sia proporzionale alla distanza tra il punto più distante dell'asta dalla sbarra, studiare le condizioni di equilibrio del sistema. E se il bastone fosse vincolato ad essere rivolto verso l'interno (con la massa vicina alla sbarra)?

61. In un recipiente di volume V_1 vi è un gas a pressione p_1; all'interno del recipiente ve ne è un altro, di volume V_2, contenente un gas a pressione $p_2 > p_1$. Un canale sottilissimo, di sezione S, collegai due recipienti. Studiare l'evoluzione del sistema.

62. La temperatura dell'acqua in un fornello in funzione da molto tempo è stabile a 90 °C. Spento il fornello, quanto impiega la temperatura dell'acqua a scendere di un grado?

63. Cos'è il momento angolare? Dimostrare l'uguaglianza delle sue due scritture più standard.

64. Un blocco oscilla a causa di una molla a cui è attaccato. Sulla faccia superiore del blocco viene posizionato un cilindro con l'asse perpendicolare alla direzione dell'oscillazione, che inizia a rotolare perfettamente. Determinare le equazioni necessarie a trovare il periodo del moto.

65. In discesa, con quale ruota della bici è meglio frenare? Perché?

66. Descrivere il moto di un punto di massa m all'interno di una sfera uniforme di massa M.

67. Modellizzare e studiare l'urto di una palla che impatta il pavimento con velocità orizzontale v_0, velocità verticale v_0' e velocità angolare ω_0 (la palla ruota rispetto ad un asse parallelo al pavimento). Tra pavimento e palla è presente attrito.

68. Un tappo di sughero galleggia nell'acqua. Viene versato dell'olio, che va a creare una sottile patina sopra l'acqua. Il baricentro del tappo si alza o si abbassa?

3 Domande per chimici e biologi

3.1 Matematica

1. Nello spazio cartesiano, sono dati n punti distinti a coordinate intere. Qual è il minimo n tale che almeno uno dei punti medi a due a due dei punti dati abbia coordinate intere?

2. Risolvere alcuni problemi sui polinomi e sulle proprietà dei quadrati dei numeri interi.

3.2 Fisica

1. Spiegare il funzionamento del ciclo di Carnot.

2. Risolvere alcuni problemi sulla conservazione dell'energia meccanica.

3. Una sbarra omogenea di lunghezza l, poggiata su un tavolo senza attrito, viene colpita da una martellata a distanza d dal centro. Descrivere il moto rototraslatorio della sbarra dopo l'urto.

4. Descrivere le caratteristiche di un condensatore. Cosa succede se tra le piastre viene inserito un dielettrico? Fissate carica sulle piastre e distanza tra di esse, in base a cosa varia il potenziale?

5. Qual è la condizione necessaria (e sufficiente) per avere piccole oscillazioni? Discutere il concetto di potenziale di un campo di forze conservative, dimostrare la formula del potenziale gravitazionale e dire come è legata alla forza.

3.3 Chimica

1. Discutere sinteticamente il concetto di pH. Come viene alterata l'attività dall'aggiunta di altri soluti? Discutere brevemente dell'attività.

2. Cos'è un tampone? Come si può creare un tampone che funzioni a pH molto elevato? Descrivere la curva di titolazione, in particolare come procede asintoticamente verso il pH della soluzione con cui si sta titolando. Parlare degli indicatori nelle titolazioni.

3. Discutere il concetto di equilibrio e la sua alterazione in seguito a variazioni delle condizioni iniziali. Qual è la relazione tra la costante di equilibrio e l'energia libera di Gibbs?

4. Qual è la differenza tra fosforescenza e fluorescenza?

5. Parlare dell'equilibrio in soluzione acquosa con riferimento agli aspetti termodinamici. Come variano questi ultimi nelle reazioni?

6. Qual è la struttura del benzene? Qual è il suo stato di ibridazione? Confrontare il benzene con il carbonio puro (sotto forma di grafene e diamante).

7. Come varia la densità dell'acqua in funzione della temperatura? Perché è massima a $4\,^\circ\mathrm{C}$? Cosa succede tra $0\,^\circ\mathrm{C}$ e $4\,^\circ\mathrm{C}$?

8. Discutere di cinetica e delle coordinate di reazione, in particolare dell'effetto dei catalizzatori.

9. Come si usano l'entalpia e l'entropia per valutare il verso di una reazione?

10. Parlare dell'energia di legame.

3.4 Biologia

1. Avendo due provette di sangue di due gemelli omozigoti, come si fa ad assegnare la provetta al gemello a cui appartiene?

2. Spiegare cos'è il potenziale d'azione, come funziona, gli spostamenti degli ioni che si verificano e tracciarne il grafico tipico.

3. Quante coppie di basi ci sono all'incirca nel DNA umano? Come mai alcune specie (ad esempio il rospo o il mais) hanno una quantità molto maggiore di DNA, di cui la maggior parte è completamente inutile per le funzioni biologiche?

4. Come vengono trasmesse le modifiche epigenetiche degli istoni nella replicazione cellulare?
5. Cosa potrebbe succedere se ci fossero amminoacidi in fase gassosa?
6. Perché le basi azotate sono quattro?
7. Quali sono i tipi di α-eliche? Quali sono le differenze?
8. Discutere dei meccanismi di speciazione e dei metodi di controllo della trascrizione e della traduzione dei geni.
9. Descrivere la trasmissione dell'impulso nervoso.
10. Discutere di ingegneria genetica, in particolare dei plasmidi e dell'episoma Hfr.
11. Descrivere la meiosi e il crossing over.
12. Come si sintetizano gli amminoacidi artificiali? Qual è un ipotetico modo di inserirli nei polipeptidi?

4 Consigli

Alcuni problemi della lista sono dei classici e vengono ogni anno chiesti all'ammissione (ad esempio i problemi 4 e 59 di matematica e il 16 di fisica), per cui è bene impararli. Inoltre, capita spesso che vengano chiesti dei problemi presenti in prove scritte degli anni passati, quindi esercitarsi sui vecchi scritti serve anche per l'orale. All'orale di fisica, oltre alle domande scritte qui, sono stati anche chiesti a più persone alcuni punti della prova scritta che non erano stati svolti correttamente.
All'esame è consigliabile rimanere il più possibile tranquilli e pensare con calma, senza fretta. Se un problema sembra tanto difficile, va benissimo ragionare come lo si farebbe allo scritto, ma ad alta voce (ad esempio esaminando preliminarmente dei casi particolari semplici): non c'è bisogno di risolvere il problema immediatamente, anzi i professori sono proprio interessati a vedere come ragiona il candidato.
All'orale di biologia hanno chiesto un argomento a piacere per cominciare, dunque è meglio prepararselo prima.
Buon lavoro!

La classe di scienze SNS, I anno, a.a. 2015/2016