Prerequisiti di Algebra

secondo φ August 26, 2014

1 Guida alla lettura

Questo file, prodotto con incredibile anticipo rispetto allo stage, parla di un paio di cose (cioè circa 4) che verranno probabilmente date per scontate durante le lezioni di Algebra 2 e Algebra 3 basic. Siccome mi sono sentita in colpa all'idea di chiedervi di sapere qualcosa prima di cominciare uno stage, contiene anche qualche spiegazione dei concetti incriminati (che, in molti casi, a malapena si qualificano come concetti). Siccome poi mi annoiavo, contiene anche una certa dose di scarcasmo gratuito e di note a piè di pagina.

L'idea è che, visto che non avrete di meglio da fare durante il vostro lungo viaggio in treno (se non forse giocare al gioco del Cucco) potete tranquillamente dare una letta a queste pagine prima che ci vediamo (specialmente se avete intenzione di frequentare A2 e A3 basic, ma non è un requisito stringente). Se c'è qualcosa che non capite *non* è un problema: se un paragrafo vi risulta oscuro, ci sono molti possibili rimedi, che vi consiglio di provare in quest'ordine:

(a) rileggetelo;

(b) chiedete informazioni ai vostri compagni di viaggio;

(c) ignoratelo;

(d) chiedetene conto a me (o ad altri) prima della lezione rilevante.

Ogni sezione (tranne quella su successioni e funzioni) contiene delle domande di 'controllo', alle quali potrebbe esservi utile rispondere; se venite da lontano e quindi vi avanza tempo, ci sono anche gli esercizi del libretto indicati all'inizio della sezione. Se volete controllare le vostre risposte, sentitevi liberi di chiedere a me (o a chiunque altro: se avete fretta, il controllore sembra un buon candidato), prima della lezione, dopo o perfino – se non potete fare altrimenti – durante.

2 Prerequisiti: Algebra 2

2.1 Notazione: somme cicliche e simmetriche

`cfr. sezione 3.3 del libretto`

Non si tratta di veri e propri contenuti, ma solo di un modo comodo di scrivere somme: non c'è niente (o quasi) da sapere, ma un po' di dimestichezza con la notazione rende molto più immediate tante manipolazioni di espressioni algebriche (e.g. passare da una forma a un'altra in una disuguaglianza); più siete scaltri, meno rischiate errori di calcolo stupidi, e più tempo avete per farvi venire in mente profondissime e meravigliose idee.

Detto questo, se per caso non vi sovvenisse, l'idea della notazione non è niente di trascendentale: perché scrivere $ab+bc+cd+da$ quando basterebbe dire ab più... bc, più... beh... cicliche? Visto che scrivere ben quattro monomi è chiaramente uno spreco di tempo, scriviamo $\sum_{cyc} ab$, e ci capiamo. Ci capiamo davvero? Chi mi dice che ci siano 4 variabili, ergo 4 monomi? Il contesto. Chi mi dice che la terza variabile non si chiami η_w? La fiducia nel genere umano (o perlomeno nei matematici). Quindi cosa significa $\sum_{cyc} a$? Se abbiamo a che fare con 4 variabili a, b, c, d, significa $a + b + c + d$. Se le variabili fossero tre, significherebbe $a + b + c$. Tutto qui.

Supponiamo di star lavorando con le nostre tre variabili preferite, a, b, c. La somma ciclica di a^2b avrà mai un termine c^2b? No, perché ciascuno dei tre monomi contiene una variabile elevata al quadrato, moltiplicata per *la sua successiva* (dove la successiva di c è a).

E se io avessi voluto scrivere $a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c$? Certo, $\sum_{cyc} a^2b + b^2a$ avrebbe fatto al caso mio. Ma, visto che ci siamo, ci facciamo un ulteriore sconto e scriviamo $\sum_{sym} a^2b$: somma simmetrica. L'idea è che la somma simmetrica ha un termine per ogni permutazione delle variabili, non solo per quelle cicliche. Quanto fa, dunque, $\sum_{sym} ab$? Sarà $ab + bc + ca$?

No.

Naturalmente fa $2(ab + bc + ca)$, così come $\sum_{sym} a$ fa $2(a + b + c)$: non dobbiamo dimenticare le permutazioni che scambiano due variabili e lasciano fissa la terza, anche quando le variabili scambiate sono elevate alla stessa potenza, e quindi indistinguibili nel nostro monomio. D'altra parte non c'è modo di sbagliarsi: le permutazioni di n variabili sono $n!$, e quindi una somma simmetrica avrà $n!$ termini, eventualmente contati con molteplicità, così come una somma ciclica ne avrà n.

Ecco una serie di domande per controllare se siamo sulla stessa lunghezza d'onda:

- Una somma ciclica può essere un'espressione simmetrica (ovvero invariante sotto qualunque permutazione delle variabili)?
- La somma ciclica di un determinato monomio può essere uguale alla somma simmetrica dello stesso? (Se sì, quando?)
- Come scrivere $(a + b + c)^3$ in termini di somme cicliche/simmetriche?
- Qual è il coefficiente di $a^2b^2c^2$ in $(\sum_{cyc} a)(\sum_{cyc} ab)(\sum_{cyc} a^2b)$?

Direi che, se non avete avuto particolari esitazioni nel rispondere, ci siamo capiti. Non dovrebbe esservi necessario, a questo punto, calcolare 'a mano' il cubo di un trinomio: i pensieri che vi passano per la mente dovrebbero essere (o, alla lunga, diventare) analoghi ai seguenti:

> *$(a+b+c)^3$ ha 27 termini che devono essere tutti di terzo grado, ed è un'espressione simmetrica. Non è che i monomi di terzo grado in tre variabili siano tanti, eh. Intanto ci dev'essere $\sum_{cyc} a^3$, che si vede subito. C'è abc, ma che coefficiente ha? 6, perché la posso ottenere in 6 modi (permutando come voglio i tre fattori). Rimangono 18 termini, che devono andare a formare un'espressione simmetrica. Non c'è dubbio, quindi, che quel che resta sia $3\sum_{sym} a^2b$, dato che gli unici monomi di terzo grado rimasti fuori sono quelli con una potenza seconda per una potenza prima.*

È giunto il momento di rivolgersi a chi, giustamente, ha letto fin qui con aria molto scettica, storcendo il naso davanti all'orrore tipografico propagandato fin adesso, e pensando:

> *Ma veramente che scrivere $\sum_{cyc} a$ per $a + b + c$ sia risparmiare tempo non me la danno a bere. Sono 12 contro 5 caratteri in LaTeX, senza contare i dubbi esistenziali sul fatto che 'cyc' debba essere in mathmode o meno. Questa notazione è una truffa. Faccio molto prima a scrivermi tutti i termini, così posso esercitare il mio sacrosanto diritto di chiamare le variabili $x, d, h, 7, \epsilon$ e $\aleph$.*

Ebbene sì, scrivendo tutti i termini di una somma, magari anche in ordine sparso, potremmo pure fare prima. Tante notazioni vendute come un risparmio di tempo non lo sono davvero, specialmente all'inizio, quando non si hanno gli automatismi. Come un sacco di notazione, le somme cicliche e simmetriche non servono (solo) a scrivere più in fretta: servono a *vedere le cose*. Se state avendo a che fare con un'espressione simmetrica, o con un'espressione che non è simmetrica ma si presta a essere resa tale, volete essere i primi a saperlo[1]. Raggruppare pezzi della vostra espressione in somme simmetriche e cicliche dovrebbe aiutarvi a mantenere un controllo sull'espressione intera, e anche a farvi venire (o più probabilmente tornare) in mente fattorizzazioni.

Per concludere, un problema difficile[2].

Problema 1 Si consideri il polinomio $p(x) =$; dette a, b, c le sue radici, con $a \geq b \geq c$, quanto vale $\sum_{cyc} a^2 b$?

2.2 Medie: definizione, disuguaglianze e dimostrazioni nel caso di due termini

Qui c'è ben poco da dire, anche perché probabilmente le conoscete già, e ne riparleremo a lezione in ogni caso. Dati a, b reali positivi, potete definire

- la loro media aritmetica, come $\frac{a+b}{2}$;
- la loro media geometrica, come $\sqrt{ab}$;
- la loro media quadratica, come $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$;
- la loro media armonica, come $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

e altre cose, ma fermiamoci qui. Dovrebbe esservi facile (senza usare *nulla*, se non eventualmente carta e penna[3]) dimostrare la ben nota disuguaglianza tra le medie

$$\text{media quadratica} \geq \text{media aritmetica} \geq \text{media geometrica} \geq \text{media armonica}.$$

Posto questo, sapete ora rispondere a un sacco di domande stupide:

- quanto vale al massimo l'area di un rettangolo di perimetro 12?

[1] Per vari motivi, che non sono prerequisiti ma Algebra 2 vera e propria: poter imporre un ordinamento arbitrario sulle variabili, usare le funzioni simmetriche elementari e disuguaglianze connesse...

[2] ma non tanto

[3] e il fatto che i quadrati siano positivi... *wink* *wink*

- quanto è lunga al minimo l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di area 121?
- qual è la velocità media di un ciclista su un percorso che è metà in salita e metà in discesa, sapendo che percorre i pezzi in discesa a velocità v e quelli in salita a velocità $v/3$?

Per medie a n termini, medie p-esime, annessi e connessi, ci rivediamo ad Algebra 2...

3 Prerequisiti: Algebra 3

3.1 Successioni e funzioni: hic sunt dracones

Cos'è una funzione?

Bella domanda. È fin troppo facile cadere nel tranello tesoci regolarmente dalla nostra limitata immaginazione, combinata con anni di esercizi su Ruffini, sulle derivate, sui cosiddetti studi – appunto – di funzione...

Sì, lo so, sembriamo fissati con questa storia delle funzioni che sono bestie orripilanti; ma, dopo aver letto numerose soluzioni che, alla domanda 'quali funzioni soddisfano *bla*', rispondono con un disarmante quanto volenteroso: 'beh; l'esponenziale no, il logaritmo no, seno e coseno no, tangente no, non sono finite?', ci teniamo a far passare questo punto.

No, non sono finite.

Una funzione da un insieme A a un insieme B è semplicemente un insieme di coppie (a, b), dove a è un elemento di A, b uno di B, e l'insieme contiene *esattamente* una coppia per ogni elemento di A. La funzione $f(x) = x^2$, definita sui reali, non è altro che l'insieme $\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$. L'insieme $\{(x, \max\{y \leq x \mid y \in \mathbb{Z}\}) \mid x \in \mathbb{R}\}$ è indubbiamente una funzione sui reali, perché per ogni numero reale esiste precisamente un intero che sia massimo fra quelli minori o uguali al reale in questione; in particolare, è la funzione che siamo abituati a scrivere come $f(x) = \lfloor x \rfloor$, e a chiamare parte intera. Ma possiamo avere ben più fantasia, e darci allo studio della funzione $\{(x, \text{365-esima cifra nello sviluppo decimale di } x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, o

$$\{(n, \text{numero di persone vissute sulla terra almeno } n \text{ giorni}) \mid n \in \mathbb{N}\},$$

a patto che siamo d'accordo su cosa si qualifichi come persona, e come persona viva.

Ma, per quanto io possa sforzarmi d'inventare le definizioni più assurde, no, le funzioni non saranno finite. Neanche quando ci avrò messo la scala di Cantor[4].

Ah, le successioni. Questa è facile: le successioni sono funzioni sui naturali (che li facciate partire da 0 o da 1 poco importa). Tendiamo a scriverle come $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ (per dire $\{(n, a_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, o $f(n) = a_n$) perché i naturali sono belli ordinati, quindi tanto vale fare una lista. Naturalmente non è che ci sia un comodo catalogo delle successioni: neanche quelle si esauriscono facilmente.

Ma non temete: gli strumenti per districarvi in questa infinità molto infinita di oggetti orribili e per dire che la soluzione della vostra equazione funzionale è, con grande sollievo di tutti, $f(x) = 0$ o $f(x) = x$, vi verranno dati durante Algebra 3.

[4] Una storia molto affascinante, ma per un'altra volta.

3.2 Iniettiva, Surgettiva, Bigettiva

`cfr. esercizio 87, sezione 3.5 del libretto`

Sarebbe bene che, prima di cominciare, sappiate (ricordiate) il significato di quelle tre parole che finiscono con 'iva'.

Ve lo scrivo qui, così non dovrò ripetervelo a lezione, e non mi guarderete male.

Una funzione f da A a B è

- *iniettiva*, se associa a elementi diversi di A elementi diversi di B; ovvero se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$; o ancora se $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$;
- *surgettiva*, se tutti gli elementi di B compaiono come immagine di (almeno) un elemento di A; ovvero se per ogni y in B esistse x in A tale che $f(x) = y$;
- *bigettiva* se è sia iniettiva che surgettiva.

Notare che la surgettività (ergo la bigettività) dipende dalla scelta di B, che è per certi versi arbitraria: l'insieme B contiene l'immagine dell'insieme A tramite f, ed eventualmente elementi che f non 'prende' mai. Si può sempre dire che f sia surgettiva sulla sua immagine $f(A)$; spesso, tuttavia, non abbiamo modo di caratterizzare $f(A)$ adeguatamente, se non abbiamo abbastanza informazioni su f.

Date una funzione f da A a B e g da B a C, possiamo considerare la composizione di f e g, cioè la funzione che va da A a C e associa a x l'elemento $g(f(x))$: la funzione $g(f(\cdot))$, dato un qualunque elemento di A, gli applica prima f, ottenendo così un elemento di B, dal quale tramite g produce un elemento di C. Date informazioni sulla —ettività di f e g, cosa possiamo dire di $g(f(\cdot))$ [rispondere vero o falso]?

- È surgettiva se e solo se g è surgettiva.
- È necessario che sia f sia g siano iniettive perché sia iniettiva.
- È sufficiente che sia f sia g siano iniettive perché sia iniettiva.
- Perché sia iniettiva è necessario che f sia iniettiva, ma non è indispensabile che lo sia g.
- È surgettiva se e solo se f e g sono surgettive.
- Se è surgettiva, allora f è surgettiva.
- Se è surgettiva, allora g è surgettiva.
- È bigettiva se e solo se f e g sono entrambe bigettive.

Visto quante cose false? Prima che vi vengano strane idee, dovreste aver risposto FFVVFFVF (sapete trovare dei controesempi alle affermazioni false?). In sostanza, se sapete che $g(f(\cdot))$ è surgettiva, allora dev'esserlo g; se sapete che è iniettiva, dev'esserlo f.

Per tutti i trucchi che iniettività e surgettività vi permettono nelle equazioni funzionali (ehm, se non tutti per lo meno alcuni dei), ci vediamo ad Algebra 3.